Apellido y Nombre: N° de libreta:

1	2	3	4	5	NOTA

El examen se aprueba sumando un total de 60 puntos o más. Por favor entregar cada ejercicio en hojas separadas. Justificar todas las respuestas.

1. **[20 puntos]** Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias independientes tales que $X_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   (a) [4 puntos] Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ es creciente y no acotada, mostrar que $(X_n)_{n\geq 1}$ es acotada en probabilidad.
   (b) [6 puntos] Si $\text{lím}_n \lambda_n = \lambda$, estudiar el límite en distribución de $(X_n)_{n\geq 1}$ para $\lambda \in [0, +\infty]$.
   (c) [6 puntos] Mostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ *ctp*.
   (d) [4 puntos] Sea $X_{(n)} = \text{mín}\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$, dar condiciones suficientes sobre $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ para que $X_{(n)} \xrightarrow{D} X$ con $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

2. **[20 puntos]** Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias tales que $\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, con g' continua en un entorno de μ y $g'(\mu) \neq 0$.
   (a) [5 puntos] Probar que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.
   (b) [10 puntos] Mostrar que $\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{D} \mathcal{N}\big(0, [\sigma g'(\mu)]^2\big)$.
   (c) [5 puntos] Si $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.i.i.d. con $X_n \sim \text{Exp}\big(\frac{1}{\mu}\big)$, hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}\big(\overline{X_n}^2 - \mu^2\big)$.

3. **[15 puntos]** Un estudiante tiene 4 tarjetas *SUBE*, algunas en su casa y otras en el locker de la facultad. Por suerte vive cerca de la facultad. Si al salir de su casa a la mañana se siente de *buen humor*, se va caminando, si no se toma el colectivo, lo mismo cuando regresa de la facultad por la noche. Independientemente de donde esté (ya sea la casa o la facultad), se siente de *buen humor* con probabilidad $p \in (0, 1)$. Si está de mal humor (con probabilidad $q = 1 - p$) agarra una tarjeta y se dirige a la parada a tomarse un colectivo y si no llega a tener una tarjeta se tiene que ir caminando de todos modos. Sea X_n el número de tarjetas *SUBE* que hay en el sitio donde se encuentra cuando va a realizar el n-ésimo viaje.
   (a) [10 puntos] Hacer un diagrama de la cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ y dar la matriz de transición $\mathbf{P}$.
   (b) [5 puntos] Hallar una distribución invariante de la cadena $(X_n)_{n\geq 0}$.

4. **[20 puntos]** Sean X, Y variables aleatorias tales que $Y|X = x \sim \mathcal{B}i(n, x)$ y $X \sim \beta(a, b)$.
   (a) [10 puntos] Describir la distribución de Y, calcular $\mathbb{E}[Y]$ y $\mathbb{V}[Y]$. ¿Qué distribución tiene Y cuando $a = b = 1$?
   (b) [10 puntos]. Hallar la distribución de $X|Y = k$ y calcular $\mathbb{E}[X|Y = k]$ para $0 \leq k \leq n$.

5. **[25 puntos]** Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) \qquad \theta > 0.$$

   (a) [6 puntos] Encontrar $\widehat{\theta}$, el *E.M.V.* de θ basado en la muestra $X_1, \cdots, X_n$.
   (b) [3 puntos] Encontrar θ_M, el *Estimador de Momentos* de θ basado en la muestra $X_1, \cdots, X_n$.
   (c) [8 puntos] Sea $X^{(n)} = \text{máx}\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que $X^{(n)} \xrightarrow{ctp} \theta$.
   (d) [8 puntos] Hallar el límite en distribución de $Z_n := n(\theta - X^{(n)})$.